ANÁLISIS

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO

Límite finito de una función

El límite de una función f(x), cuando x tiende a +∞, es un número real L, cuando para valores muy grandes de x, los valores de la función se aproximan al número L.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

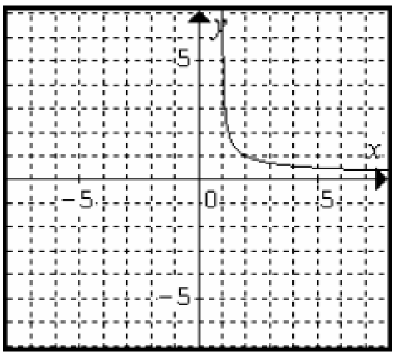
Teoría: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ si para cualquier número positivo tan pequeño como queramos, ε, podemos encontrar un número x_0 tal que: Para cualquier $x > x_0$ se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$

El límite de una función f(x), cuando x tiende a -∞, es un número real L, cuando para valores muy pequeños de x, los valores de la función se aproximan al número L.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Teoría: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ si para cualquier número positivo tan pequeño como queramos, ε, podemos encontrar un número x_0 tal que: Para cualquier $x < x_0$ se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$

Ejemplo 1



$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x-1}} = 0$$

Límite infinito de una función

- El límite de una función f(x), cuando x tiende a +∞, es +∞ cuando para valores muy grandes de x, los valores correspondientes de f(x) son mayores que cualquier número prefijado.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- El límite de una función f(x), cuando x tiende a +∞, es -∞ cuando para valores muy grandes de x, los valores correspondientes de f(x) son menores que cualquier número prefijado.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

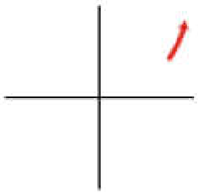
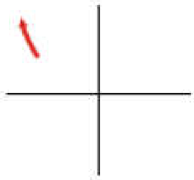
- El límite de una función f(x), cuando x tiende a -∞, es +∞ cuando para valores muy pequeños de x, los valores correspondientes de f(x) son mayores que cualquier número prefijado.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

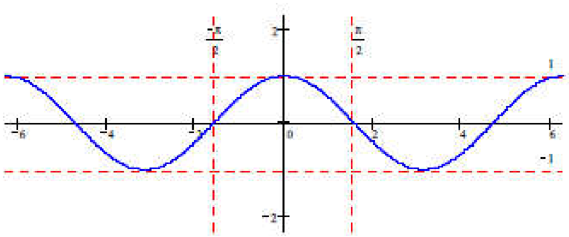
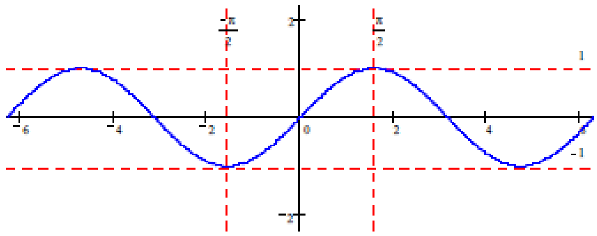
- El límite de una función f(x), cuando x tiende a -∞, es -∞ cuando para valores muy pequeños de x, los valores correspondientes de f(x) son menores que cualquier número prefijado.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (4-x)^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} (4-x)^2 = +\infty$$

Puede ocurrir que la función no tenga límite cuando x tiende a $\pm\infty$ como ocurre con las gráficas del seno y del coseno.

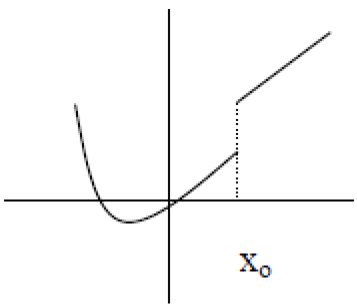



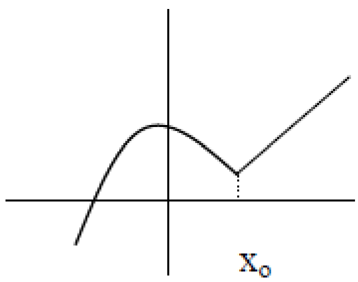
LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Límite finito de una función en un punto

Sea f(x) una función de variable real. Diremos que **el límite de f(x) cuando f(x) tiende a x_0 es igual a L,** si se verifica que cuando x es muy próximo a x_0, f(x) está muy próximo a L.

Si para todo entorno de L, E(L), existe un entorno de x_0, E (x_0), tal que para todo x∈ E(x_0), x≠x_0, se verifica que f(x) ∈ E(L). Se representa por $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$





La gráfica de la izquierda no tiene límite. Cuando x se acerca a x_0 la función toma valores distintos dependiendo de si nos acercamos por la izquierda (valores menores de x_0)o por la derecha (valores mayores de x_0). Tiene **límites laterales distintos.**

La gráfica 2 tiene límite cuando x tiende a x_0.

Límites laterales

El límite de una función f(x) cuando x tiende a un punto x_0 por la izquierda, es un número real L, cuando para valores de x muy próximos a x_0 y menores que x_0, los valores de la función se aproximan al número L.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Teoría: **El límite de una función f(x) cuando x tiende a un punto x_0 por la izquierda,** es un número real L, y lo escribimos como $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$,si para cualquier número positivo tan pequeño como queramos, ε, tal que podemos encontrar un número δ>0 que verifique que: Si c-δ < x < c entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

El límite de una función f(x) cuando x tiende a un punto c por la derecha, es un número real L, cuando para valores de x muy próximos a c y mayores que c, los valores de la función se aproximan al número L.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Teoría: **El límite de una función f(x) cuando x tiende a un punto x_0 por la derecha,** es un número real L, y lo escribimos como $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$,si para cualquier número positivo tan pequeño como queramos, ε, tal que podemos encontrar un número δ>0 que verifique que: Si c< x < c+δ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Límite de una función en un punto

El **límite** de una función f(x), cuando **x tiende a un punto x_0**, es un número real **L** cuando

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

La condición necesaria y suficiente para que f(x) tenga límite en un punto, es que existan los limites laterales, por la izquierda y por la derecha, y sean iguales. <u>El límite si existe, es único.</u>

Límite infinito de una función en un punto

Cuando estudiamos el comportamiento de una función en un punto el valor al que se acerca la imagen por la izquierda o por la derecha no siempre es un número real.

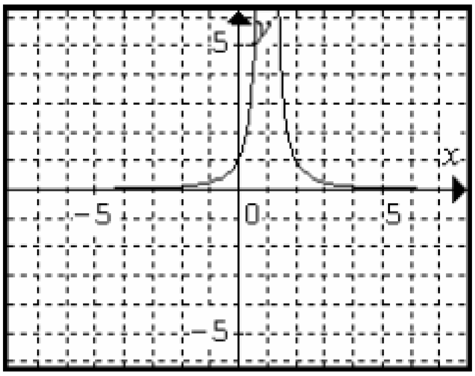
Si x_0 es un número real $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ quiere decir que cuando x tomo valores próximos a x_0 (por ambos lados), los correspondientes valores de f se harán cada vez más grandes.

De forma análoga se define $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Ejemplo1

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

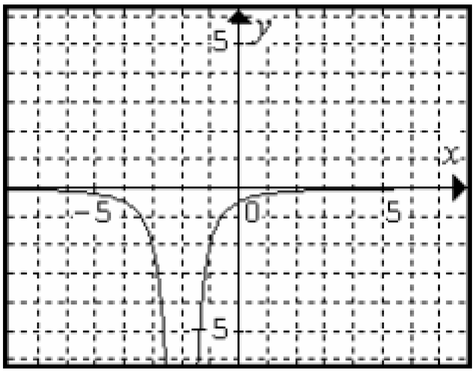
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$



Ejemplo 2

$$\lim_{x \to -2} \frac{-2}{(x+2)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{-2}{(x+2)^2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{-2}{(x+2)^2} = -\infty$$

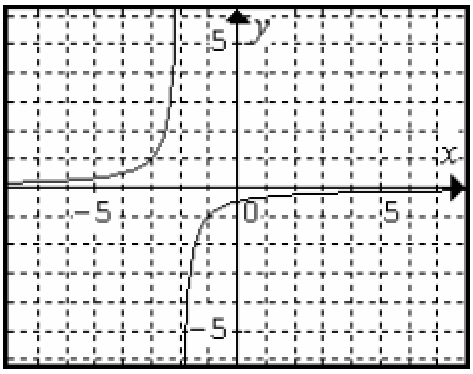


Ejemplo 3

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{-1}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{-1}{x+2} = +\infty$$

Los límites laterales son distintos, no existe límite

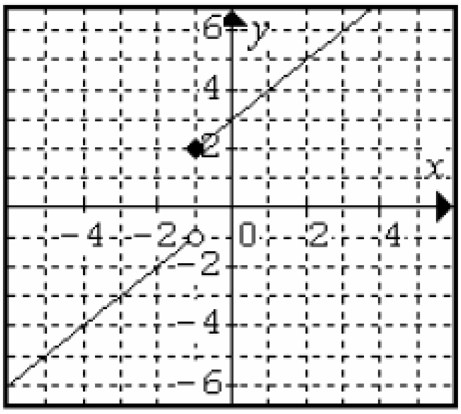


Ejemplo 4

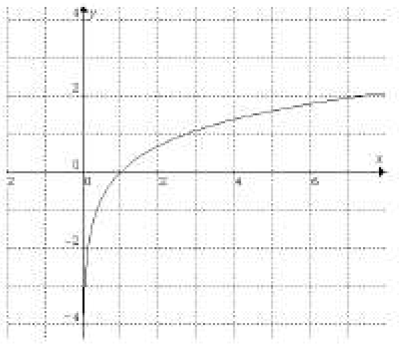
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$$

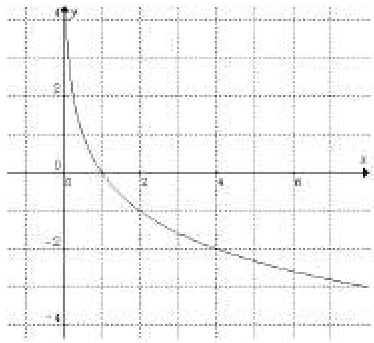
Los límites laterales son distintos, no existe límite



En las funciones logarítmicas solo podemos hablar de un límite lateral, ya que el dominio de la función son los números reales positivos.



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

OPERACIONES CON LÍMITES

Sean dos funciones f(x) y g(x), para las que existe límite:

- $\lim\limits_{x\to\infty}(f+g) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to\infty}(f-g) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to\infty}(f.g) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}$ siempre que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a f(x) = \log_a \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \neq 0$

CALCULO DE LÍMITES

Sustituiremos la variable x por el valor al que tiende .

Al realizar las operaciones podemos obtener resultados que tienen sentido en R, y los límites se llaman **determinados.**

En ocasiones los resultados no tienen sentido en R, y el límite será **indeterminado**. Tendremos que manipular la expresión de la función para conseguir otra equivalente y que las operaciones que aparezcan se puedan realizar.

Calcula los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3}{x+1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3}{x+1}=\dfrac{(-2)^2-3}{-2+1}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\dfrac{1-3+2}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ Indeterminado

Factorizamos numerador y denominador y simplificamos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x-2=1-2=-1$$

Límite de funciones con potencias

$\lim\limits_{x\to\infty}x^k$ $\qquad \infty^{n^\circ positivo}=\infty$; $\quad \infty^0=IND$; $\quad \infty^{n^\circ negativo}=0$ $\quad \boxed{\dfrac{número}{\infty}=0}$

Límite de funciones exponenciales

$\lim\limits_{x\to\infty}k^x$ $\qquad k^\infty=+\infty$ si k es mayor que 1; $\quad k^\infty=0$ si $0\le k<1$; si $k<0$ no existe

$\lim\limits_{x\to -\infty}k^x$ $\qquad k^{-\infty}=0$ si k es mayor que 1; $\quad k^{-\infty}=+\infty$ si $0\le k<1$; si $k<0$ no existe

Ejercicios

$\lim\limits_{x\to\infty}x^5=$

$\lim\limits_{x\to -\infty}x^5=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2}=$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt[3]{x^2}=$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^4}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}$

$\lim\limits_{x\to -\infty}5^x=$

$\lim\limits_{x\to\infty}5^x=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=$

$\lim\limits_{x\to\infty}5^{x^2}=$

$\lim\limits_{x\to -\infty}5^{x^2}=$

Límite de un polinomio

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)=\lim_{x\to\infty}a_kx^k=a_k\lim_{x\to\infty}x^k$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^3+3x^2+x+2\right)=\lim_{x\to\infty}2x^3=2\lim_{x\to\infty}x^3=2.(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-2x^3+x^2-3x+2\right)=\lim_{x\to\infty}(-2x^3)=-2\lim_{x\to\infty}x^3=-2.(+\infty)=-\infty$$

Ejercicios

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3-12x\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-0{,}001x^2\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}0{,}6^{2x-1}$$

Expresiones no indeterminadas

Pag 198 de tu libro

RESOLUCIÓN DE ALGUNAS INDETERMINACIONES

TIPOS DE INDETERMINACIONES

Asociadas a la suma o resta $\infty-\infty$
Asociadas al producto $0.\infty$
Asociadas al cociente $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$
Asociadas a la potenciación 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}

Indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$

Resuelve los siguientes límites: (Podemos resolverlo de tres formas: sacando factor común en numerador y denominador a la x de mayor grado que hay en la fracción (sería x^3), sacando factor común a la x de mayor grado que hay común (sería x^2) o en vez de sacar factor común dividiendo los términos del numerador y del denominador)

Ejercicios

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^3-x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3+2x-3}{2x^2-x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-3}{2x^3-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$

Observa los resultados de los límites anteriores

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$$

Si grado de P(x) > grado Q(x) el límite dará ∞

Si grado de P(x) < grado Q(x) el límite dará 0

Si grado de P(x) = grado Q(x) el límite serán los coeficientes de los términos de mayor grado.

Indeterminaciones $\infty - \infty$

Ejemplo: Límites de la diferencia de cocientes de polinomios

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{x+1}-\frac{3x^3+2x-2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x+1}-\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-2}{x^2-1}=\infty-\infty$$ Indeterminado

Realizamos la resta de las fracciones algebraicas

$$\left(\frac{2x^2-3}{x+1}-\frac{3x^3+2x-2}{x^2-1}\right)=\left(\frac{2x^2-3}{x+1}-\frac{3x^3+2x-2}{(x+1)(x-1)}\right)=\frac{(x-1).(2x^2-3)-(3x^3+2x-2)}{(x+1)(x-1)}=\frac{-x^3-2x^2-5x+5}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3-2x^2-5x+5}{x^2-1}=$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x \Rightarrow \ldots \infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

Ejercicios $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-1}$

Indeterminaciones 1^∞

Si $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ y $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$, se cumple que:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to\infty}[f(x)-1].g(x)}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} \xrightarrow{\text{Aplicamos}} \lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot[f(x)-1]} \Rightarrow x_0 \text{ puede ser } \begin{cases}\pm\infty \\ n^o \text{ real}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x-5}{3x-2}\right]^{2x^2} \Rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{\infty} \text{ resolvemos el } \frac{\infty}{\infty} \text{ nos da } 1 \Rightarrow \mathbf{1^{\infty}\ Indeterminación}$$

Aplicamos la fórmula

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x-5}{3x-2}\right]^{2x^2} = e^{\lim_{x\to\infty} 2x^2\left[\frac{3x-5}{3x-2}-1\right]} = e^{\lim_{x\to\infty} 2x^2\cdot\left[\frac{3x-5-3x+2}{3x-2}\right]} =$$

$$e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-6x^2}{3x-2}\right]} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ejercicios

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x-1}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6}$

Indeterminaciones $\frac{0}{0}$

Transformamos numerador y denominador para poder simplificar la fracción

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{1-3+2}{1-1} = \frac{0}{0}$ Indeterminado

Factorizamos numerador y denominador y simplificamos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1).(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x-2 = 1-2 = -1$$

Ejercicios a) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+2x}{x^2-3x}$ b) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}}$

Continuidad de una función

Continuidad de una función en un punto

Una función **f(x) es continua en un punto x = x_0 si y solo si** $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$

Según esto para que una función sea continua en un punto deben cumplirse

1º Existe f(x_0) (x_0 tiene que estar en el dominio)

2º Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (los límites laterales tienen que ser números reales y coincidir)

3º $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$

Si una función no es continua en un punto, decimos que la función presenta una discontinuidad en ese punto

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad evitable

Se produce cuando existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, pero se da una de las siguientes condiciones

- No coincide con f(x_0)
- La función no está definida en el punto

Discontinuidad de primera especie o de salto finito

Se produce cuando no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, porque los límites laterales no coinciden $\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

Discontinuidad de segunda especie o de salto infinito

Cuando no existe alguno de los límites laterales o uno o dos de los límites laterales son infinito

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ o $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$

Continuidad de una función en un intervalo

Una función f(x) es continua en un intervalo (a,b) si es continua en todos los puntos del intervalo

Las funciones elementales son continuas en sus dominios de definición

- Las funciones polinómicas son continuas en todo R.
- Las funciones racionales no son continuas en los puntos que anulan el denominador
- Las funciones con radicales con índice de la raíz par no existen en los valores que hacen el radicando negativo. Si el índice es impar, son continuas en todo R (fijarse en el radicando)
- Las funciones exponenciales son continuas en todo R (fijarse en el exponente)
- Las funciones logarítmicas no son continuas en los puntos en los que la expresión de la que queremos hallar el logaritmo se convierte en cero o en número negativo.

- De las funciones trigonométricas la única función que no es continua es f(x) = tg x, que no existe en x= π/2 + kπ

Ejemplos

Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$y = x^2 - 4$

$y = \sqrt[4]{x^2 - 4}$

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ a + 2x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcular los valores de a y b para que la función f(x) sea continua en $\mathbb{R}$