DERIVADAS Y APLICACIONES

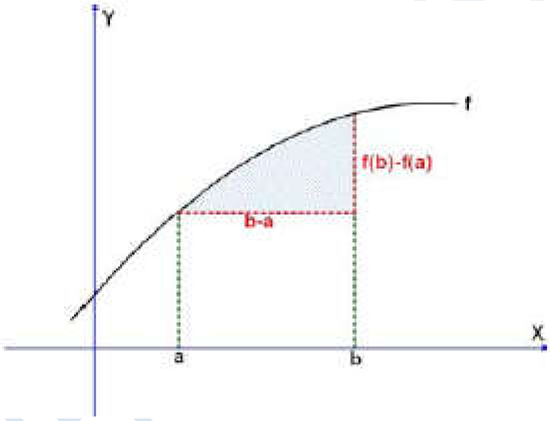
DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Tasa de variación media

La tasa de variación media de una función f(x) en un intervalo [a,b] es el cociente:

$$T.V.M.([A,B]) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(Mide el aumento o la disminución de la función en un intervalo)



Derivada de una función en un punto

La derivada de la función f(x) en un punto de abscisa x_o se denota por $f'(x_o)$, y es el valor de este límite, si existe y es finito:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_o}$$ si hacemos $x = x_o + h$ la fórmula es equivalente a $$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_0)}{h}$$

Derivadas laterales

Se llama derivada por la derecha de f(x) en $x = x_o$, $f'(x_o^+)$,es:

$$f'(x_o^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Se llama derivada por la izquierda de f(x) en $x = x_o$, $f'(x_o^-)$,es:

$$f'(x_o^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Para que exista la derivada de una función continua en un punto, sus derivadas laterales deben existir y ser iguales. Entonces decimos que la función es derivable en ese punto.

Derivabilidad y continuidad

Toda función f(x) derivable en un punto de abscisa x_o, es necesariamente continua en dicho punto.

$$\boxed{f(x_0)derivable \rightarrow f(x_0)continua}$$

Una función que no es continua en un punto no puede ser derivable en él pero una función puede ser continua en un punto y no derivable en él.

Si una función f(x) es continua en x=a pero no es derivable en ese punto, se dice que en x = a hay un <u>punto anguloso.</u>

Ejercicio

Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función en el punto de abscisa x = 2.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x<2 \\ x^2-1 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

Ejercicio

a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla $f'(0)$, $f'(3)$ y $f'(1)$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x<1 \\ x^2+x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple $f'(x) = 5$?

Comprueba que $f(x)$ es continua pero no derivable en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} ln\,(x-1) & \text{si } x<2 \\ 3x-6 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

Función derivada

Sea f(x) una función derivable en todo punto del intervalo (a,b). Sabemos entonces que para todo $x_0 \in (a,b)$ hay una única derivada $f'(x_0)$. Esto nos permite definir la función

$$\begin{array}{llll} f' : (a,b) & \longrightarrow & \Re \\ \quad x & \longrightarrow & f'(x) \end{array}$$

Que llamaremos función derivada de una función f(x), es una nueva función, f´(x), que asocia a cada punto x la derivada de f(x) en ese punto.

Derivadas sucesivas

Si f(x) es derivable en todo punto de (a,b), su función derivada f´(x) a su vez puede ser derivable en (a,b). La derivada de f´(x) se lla derivada segunda de f(x) y se representa por f´´(x).

Análogamente, podemos determinar las derivadas tercera, cuarta…, y derivar n veces para obtener la derivada n-ésima de f(x) , $f^{n´}$(x).

Decimos que hemos calculado las derivadas sucesivas de una función.

Cálculo de funciones derivadas

- Derivada del producto de un número por una función

$$y = k.f(x) \qquad y' = k.f'(x)$$

- Derivada de la suma y diferencia de funciones

$$y = f(x) \pm g(x) \qquad y' = f'(x) \pm g'(x)$$

- Derivada del producto de funciones

$$y = f(x).g(x) \qquad y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

- Derivada del cociente de funciones

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad y' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$$

- Regla de la cadena (Derivada de la composición de funciones)

$$y = g(f(x)) \qquad y' = g'(f(x)).f'(x)$$

Derivadas de las funciones elementales		Derivadas de las funciones compuestas	
Derivada de la función constante			
$y = k$	$y' = 0$		
Derivada de la función identidad			
$y = x$	$y' = 1$		
Derivada de las funciones potenciales			
$y = x^n$	$y' = n.x^{n-1}$	$y = f(x)^n$	$y' = n.f(x)^{n-1}.f'(x)$
Derivada de la función exponencial			
$y = a^x$	$y' = a^x.\ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)}.\ln a.f'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)}.f'(x)$

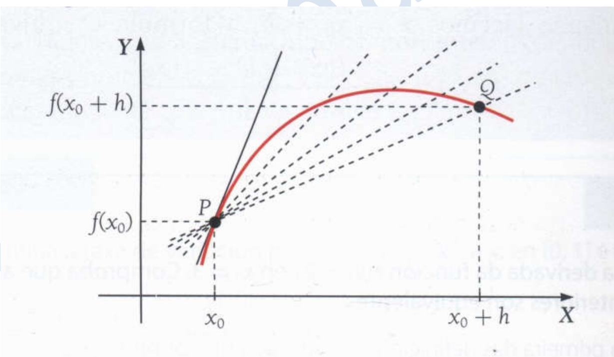
Derivada de las funciones logarítmicas			
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x.\ln a}$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x).\ln a}$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
Derivadas de las funciones trigonométricas			
$y=senx$	$y'=\cos x$	$y=senf(x)$	$y=\cos f(x).f'(x)$
$y=\cos x$	$y'=-senx$	$y=\cos f(x)$	$y=-senf(x).f'(x)$
$y=tgx$	$y'=1+tg^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y=tgf(x)$	$y'=\left[1+tg^2 f(x)\right].f'(x)=\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$y=arcsenx$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=arcsenf(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arccos f(x)$	$y'=-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=arctgx$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$y=arcsenf(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Interpretación geométrica de la derivada

Geométricamente, la derivada $f´(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $P(x_0, f(x_0))$.

Consideramos una función f(x) con la siguiente gráfica. Cogemos en ella un punto x_0.



Cualquier recta secante a la gráfica de f(x) que pase por x_0 tiene por pendiente: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Cuanto más pequeño sea el valor de h (cuando h tiende a cero) el punto x_0+h está más cerca de x_0 y la recta secante se acerca a la recta tangente en x = x_0 siendo su pendiente:

$$f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal

Utilizando la ecuación punto-pendiente de la recta, podemos definir la **recta tangente a f(x) en el punto (x_0, f(x_0))** como la recta de ecuación: $y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$

Se define la **recta normal a f(x) en el punto (x_0, f(x_0))** como la recta perpendicular a la recta tangente en el punto de tangencia (x_0, f(x_0)), y tiene como ecuación: $y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}.(x - x_0)$

Ejercicio

Escribe la ecuación de la recta tangente a f(x) = xe^x en x = 0 y a $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ en x = 0 y x = ln 4

Crecimiento y decrecimiento

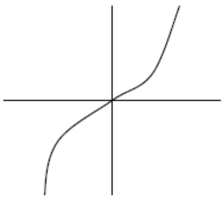
Teorema: Si f(x) es derivable en un punto x_0 de su dominio se cumple que:

Si **f´(x_0) > 0**, f(x) es **creciente** en x_0

Si **f´(x_0) <** 0, f(x) es **decreciente** en x_0

Un función f(x) es creciente o decreciente en un intervalo si es creciente o decreciente en todos los puntos de ese intervalo.

Este teorema da una condición suficiente para que una función sea creciente o decreciente, pero no necesaria como se puede ver en el siguiente ejemplo.



Ejemplo: La función f (x) = x^3 es creciente en todo R, en particular en cero, como podemos ver en la gráfica. Sin embargo f´(x) = $3x^2$ y f´(0) = 0

Máximos y mínimos relativos

Recuerda que los puntos donde la derivada de una función se anula se llaman **puntos críticos.**

Teorema: (Condición necesaria para la existencia de extremos relativos)

Si f(x) es derivable en x_0, y **tiene un extremo relativo en x_0**, se cumple que **f´(x_0) = 0**

Si f(x) presenta un máximo o un mínimo en un punto de abscisa x_0, la recta tangente en ese punto es horizontal y, por lo tanto, su pendiente es cero, es decir f´(x_0) = 0

Utilizando la primera derivada

Para decidir si un punto es máximo o mínimo se analiza el crecimiento en las proximidades del punto

Si f(x) creciente por la izquierda de x_0 y decreciente por la derecha → x_0 será un máximo

Si f(x) decreciente por la izquierda de x_0 y creciente por la derecha → x_0 será un mínimo

Utilizando la segunda derivada

Sea f(x) una función con derivada segunda en un punto x_0 :

Si $f'(x_0) = 0$ y $\mathbf{f''(x_0) < 0}$, f(x) tiene un **máximo relativo** en x_0

Si $f'(x_0) = 0$ y $\mathbf{f''(x_0) > 0}$, f(x) tiene un **mínimo relativo** en x_0

Ejercicio

Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, averigua:

a) Dónde crece. **b) Dónde decrece.**

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Una función f(x) derivable en x_0, es **cóncava** en x_0, si la recta tangente a f(x) en x_0 está situada por arriba de la gráfica en un entorno de x_0.

Una función f(x) derivable en x_0, es **convexa** en x_0, si la recta tangente a f(x) en x_0 está situada por debajo de la gráfica en un entorno de x_0.

Una función es cóncava o convexa en un intervalo si es cóncava o convexa, respectivamente, en todos los puntos del intervalo.

Puntos de inflexión

Un punto x_0 de una función f(x) en el que la función es derivable, es un **punto de inflexión** si la función cambia en él de cóncava a convexa o viceversa.

Teorema: Sea f(x) una función continua y derivable en (a,b) y que admite derivada segunda en $x_0 \in (a,b)$, se cumple entonces que:

- Si $f''(x_0) > 0$, f(x), es convexa en x_0
- Si $f''(x_0) < 0$, f(x), es cóncava en x_0

Teorema: Sea f(x) una función continua y derivable en (a,b) y que admite derivada segunda y tercera en $x_0 \in (a,b)$, se verifica entonces que,

- Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$ en x_0 hay un punto de inflexión.

Ejercicios

Comprueba que la función $y = x^3/(x-2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.

Averigua de qué tipo es cada uno de esos dos puntos singulares; para ello, debes estudiar el signo de la derivada.

a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.

b) Ídem para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

Estudia la curvatura de esta función:

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 5$$

Regla de L´Hopital

Su aplicación permite resolver algunas indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones derivables.

Regla de l' Hôpital

Si f y g son funciones continuas y derivables en un intervalo abierto que contiene a un punto x_o verificando:

a) $\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} g(x) = 0$

b) $g'(x) \neq 0$ en cualquier $x \neq x_o$ del intervalo

c) Existe $\lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces, existe $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Observaciones:

1. La regla de L'Hôpital también se puede aplicar si $x \to \pm\infty$.

2. La regla de L'Hôpital además de resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ también se puede aplicar para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

3. Si al calcular $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nos volvemos a encontrar en las condiciones establecidas por esta regla se puede volver aplicar de nuevo, y así sucesivamente las veces que consideremos oportunas para la consecución del límite buscado.

4. Para resolver el resto de indeterminaciones no se puede aplicar directamente esta regla. En estos casos se han de transformar en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ y después aplicar la regla de L'Hôpital.